Colle du 29/01 - Sujet 1
Ensembles, applications, continuité, dérivation

Question de cours. Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \frac{2x\ln(x)}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que f est prolongeable par continuité en 1.
2. La fonction f est-elle $\mathscr{C}^1$ en 1 ?
3. Déterminer la tangente de f en 1 et sa position relative au voisinage de 1.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que

$$f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \cup B = E \Rightarrow f(A) \cup f(B) = F.$$

Colle du 29/01 - Sujet 2
Ensembles, applications, continuité, dérivation

Question de cours. Démontrer que l'image d'un intervalle par une fonction...

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$. Déterminer si f est prolongeable par continuité puis si le prolongement est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 2. Soient E, F, G et H quatre ensembles. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Démontrer que

$$(\ f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives }) \quad \Leftrightarrow \quad (\ g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }).$$

Colle du 29/01 - Sujet 3
Ensembles, applications, continuité, dérivation

Question de cours. Démontrer les deux assertions suivantes :

1. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = 1$. Montrer que f est constante. Ce résultat est-il toujours vrai si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?